

Aufgabe 9 - Maschenanalyse:

Dieser Lösungsweg ist definitiv nicht der einfachste (eine andere Benennung der Maschen kann den Rechenweg vereinfachen). Da diese Lösung jedoch nicht nur zeigen soll wie der richtige Lösungsweg ist, sondern auch zum Vergleich mit der eigenen Lösung dienen soll habe ich mich für den am häufigsten gewählten Weg entschieden. Dabei werden die Maschen von links nach rechts durchnummeriert und die Richtung der Maschenströme ist jeweils im Uhrzeigersinn. Dies ergibt folgende Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} M1 : & U_1 + U_3 + U_5 + U_0 = 0V \\ M2 : & U_8 + U_5 + U_4 + U_7 = 0V \\ M3 : & U_9 + U_7 + U_2 + U_1 = 0V \\ M4 : & U_3 + U_6 + U_2 + U_4 - U_1 = 0V \end{aligned}$$

In der letzten Zeile ist ein Minus vor dem U_1 , da die Richtung von U_1 entgegen der Richtung von Masche 1 ist.

Nun werden die beiden Spannungsquellen U_1 und U_2 auf die rechte Seite geschafft:

$$\begin{aligned} M1 : & U_1 + U_3 + U_5 = -U_0 \\ M2 : & U_8 + U_5 + U_4 + U_7 = 0V \\ M3 : & U_9 + U_7 + U_2 = -U_1 \\ M4 : & U_3 + U_6 + U_2 + U_4 = U_1 \end{aligned}$$

Mit $U_x = R_x \cdot$ (Summe der Ströme die durch R_x fließen):

$$\begin{aligned} M1 : & R_1 I_{M1} + R_3 (I_{M1} - I_{M4}) + R_5 (I_{M1} - I_{M2}) = -U_0 \\ M2 : & R_8 I_{M2} + R_5 (I_{M2} - I_{M1}) + R_4 (I_{M2} - I_{M4}) + R_7 (I_{M2} - I_{M3}) = 0V \\ M3 : & R_9 I_{M3} + R_7 (I_{M3} - I_{M2}) + R_2 (I_{M3} - I_{M4}) = -U_1 \\ M4 : & R_3 (I_{M4} - I_{M1}) + R_6 I_{M4} + R_2 (I_{M4} - I_{M3}) + R_4 (I_{M4} - I_{M2}) = U_1 \end{aligned}$$

Widerstände als Vielfaches von R ausgedrückt:

$$\begin{aligned} M1 : & R I_{M1} + R (I_{M1} - I_{M4}) + R (I_{M1} - I_{M2}) = -U_0 \\ M2 : & 2R I_{M2} + R (I_{M2} - I_{M1}) + R (I_{M2} - I_{M4}) + R (I_{M2} - I_{M3}) = 0V \\ M3 : & 2R I_{M3} + R (I_{M3} - I_{M2}) + R (I_{M3} - I_{M4}) = -U_1 \\ M4 : & R (I_{M4} - I_{M1}) + 2R I_{M4} + R (I_{M4} - I_{M3}) + R (I_{M4} - I_{M2}) = U_1 \end{aligned}$$

Nach Maschenströmen umsortiert:

$$\begin{aligned} M1 : & 3R I_{M1} - R I_{M2} + 0R I_{M3} - R I_{M4} = -U_0 \\ M2 : & -R I_{M1} + 5R I_{M2} - R I_{M3} - R I_{M4} = 0V \\ M3 : & 0R I_{M1} - R I_{M2} + 4R I_{M3} - R I_{M4} = -U_1 \\ M4 : & -R I_{M1} - R I_{M2} - R I_{M3} + 5R I_{M4} = U_1 \end{aligned}$$

In Tabellenform geschrieben:

	I_{M1}	I_{M2}	I_{M3}	I_{M4}	rechte Seite	Umformung
I	$3R$	$-R$	$0R$	$-R$	$-U_0$	
II	$-R$	$5R$	$-R$	$-R$	$0V$	
III	$0R$	$-R$	$4R$	$-R$	$-U_1$	
IV	$-R$	$-R$	$-R$	$5R$	U_1	
I	$3R$	$-R$	$0R$	$-R$	$-U_0$	
II	$0R$	$14R$	$-3R$	$-4R$	$-U_0$	$I + 3 \cdot II$
III	$0R$	$-R$	$4R$	$-R$	$-U_1$	III
IV	$0R$	$-4R$	$-3R$	$14R$	$-U_0 + 3U_1$	$I + 3 \cdot IV$
I	$3R$	$-R$	$0R$	$-R$	$-U_0$	
II	$0R$	$14R$	$-3R$	$-4R$	$-U_0$	
III	$0R$	$0R$	$53R$	$-18R$	$-U_0 - 14U_1$	$II + 14 \cdot III$
IV	$0R$	$0R$	$-27R$	$90R$	$-9U_0 + 21U_1$	$2 \cdot II + 7 \cdot IV$
I	$3R$	$-R$	$0R$	$-R$	$-U_0$	
II	$0R$	$14R$	$-3R$	$-4R$	$-U_0$	
III	$0R$	$0R$	$53R$	$-18R$	$-U_0 - 14U_1$	
IV	$0R$	$0R$	$0R$	$4284R$	$-504U_0 + 735U_1$	$27 \cdot III + 53 \cdot IV$

Aus Gleichung IV erhält man nun:

$$\begin{aligned}
 I_{M4} &= \frac{-504U_0 + 735U_1}{4248R} \\
 &= \frac{-24U_0 + 35U_1}{204R} \\
 &= -\frac{2}{17} \cdot \frac{U_0}{R} + \frac{35}{204} \cdot \frac{U_1}{R}
 \end{aligned}$$

Nun erhält man aus Gleichung III:

$$\begin{aligned}
 I_{M3} &= \frac{18RI_{M4} - U_0 - 14U_1}{53R} \\
 &= \frac{18}{53}I_{M4} - \frac{1}{53} \cdot \frac{U_0}{R} - \frac{14}{53} \cdot \frac{U_1}{R} \\
 &= \frac{18}{53} \left(-\frac{2}{17} \cdot \frac{U_0}{R} + \frac{35}{204} \cdot \frac{U_1}{R} \right) - \frac{1}{53} \cdot \frac{U_0}{R} - \frac{14}{53} \cdot \frac{U_1}{R} \\
 &= -\frac{1}{17} \cdot \frac{U_0}{R} - \frac{7}{34} \cdot \frac{U_1}{R}
 \end{aligned}$$

Und Gleichung II ergibt schließlich den letzten Maschenstrom der benötigt wird, um I_7 und U_7 zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 I_{M2} &= \frac{3RI_{M3} + 4RI_{M4} - U_0}{14R} \\
 &= \frac{3}{14}I_{M3} + \frac{2}{7}I_{M4} - \frac{1}{14} \cdot \frac{U_0}{R} \\
 &= \frac{3}{14} \left(-\frac{1}{17} \cdot \frac{U_0}{R} - \frac{7}{34} \cdot \frac{U_1}{R} \right) + \frac{2}{7} \left(-\frac{2}{17} \cdot \frac{U_0}{R} + \frac{35}{204} \cdot \frac{U_1}{R} \right) - \frac{1}{14} \cdot \frac{U_0}{R} \\
 &= -\frac{2}{17} \cdot \frac{U_0}{R} + \frac{1}{204} \cdot \frac{U_1}{R}
 \end{aligned}$$

Mit I_{M2} und I_{M3} ist I_7 allgemein in Abhängigkeit von R , U_0 und U_1 :

$$\begin{aligned}
 I_7 &= I_{M2} - I_{M3} \\
 &= -\frac{2}{17} \cdot \frac{U_0}{R} + \frac{1}{204} \cdot \frac{U_1}{R} + \frac{1}{17} \cdot \frac{U_0}{R} + \frac{7}{34} \cdot \frac{U_1}{R} \\
 &= -\frac{1}{17} \cdot \frac{U_0}{R} + \frac{43}{204} \cdot \frac{U_1}{R}
 \end{aligned}$$

U_7 ist nach $U = RI$:

$$\begin{aligned}
 U_7 &= R_7 I_7 \\
 &= R I_7 \\
 &= -\frac{1}{17} U_0 + \frac{43}{204} U_1
 \end{aligned}$$

Für $R = 470\Omega$, $U_0 = 5V$ und $U_1 = 12V$:

$$\begin{aligned}
 I_7 &= -\frac{1}{17} \cdot \frac{5V}{470\Omega} + \frac{43}{204} \cdot \frac{12V}{470\Omega} \\
 &\approx 4,756mA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_7 &= -\frac{1}{17} 5V + \frac{43}{204} 12V \\
 &\approx 2,235V
 \end{aligned}$$