

Aufgabe 10 - Knotenanalyse:

Übersicht und Strategie: Die Knotenanalyse basiert auf dem 1. Kirchhoffschen Satz, welcher besagt, dass die Summe der eingehende Ströme gleich der Summe der ausgehender Ströme in einem Knoten ist. Damit wird ein Gleichungssystem aufgestellt, welches dann nach den Potentialen der Knoten aufgelöst wird. Diese Potentiale können dann benutzt werden um die Potentialdifferenzen (also Spannungen) zu berechnen die an den Widerständen abfallen. Schließlich und endlich kann man damit dann die Ströme durch die Widerstände berechnen.

a)

Aufstellen des Gleichungssystems: Als erstes wird für jeden Verbindungszweig eine Stromrichtung willkürlich festgelegt. D.h. man zeichnet an jeden Zweig mit einem kleinen Pfeil die Richtung ein. Ein Pfeil der von Knoten 3 nach Knoten 1 zeigt steht für den Strom von Knoten 3 nach Knoten 1, geschrieben als I_{31} . Der Strom wird für Knoten 1 zu den einfließenden Strömen gezählt, für Knoten 3 ist dies ein ausfließender Strom. Dies hat nichts mit der Richtung zu tun, in die der Strom durch diesen Zweig tatsächlich fließt, diese Richtung wird erst im Vorzeichen des Ergebnisses ersichtlich. Bekommt man für I_{31} einen negativen Wert heraus so fließt der Strom tatsächlich von Knoten 1 nach Knoten 3 (der Betrag bleibt allerdings erhalten). Deshalb gilt auch $I_{xy} = -I_{yx}$. Bei der Festlegung der Stromrichtungen ist es sehr nützlich nach einem festen System vorzugehen. Eine Möglichkeit ist es den Strom immer von der höheren zur niedrigeren Knotennummer einzutragen. Also z.B. I_{43} statt I_{34} .

Als nächstes muss nun ein Knoten für das Bezugspotential gewählt werden. Für gewöhnlich ist dies der Knoten der an die Masse angeschlossen ist. In diesem Fall ist dies Knoten 0. Dieser Knoten hat damit auch das Potential 0. Das Potential für Knoten 1 ist gegeben durch die Spannungsquelle U_1 . Damit müssen für diese beiden Knoten keine Gleichungen aufgestellt werden. Für die restlichen Knoten (2, 3 und 4) braucht man jeweils eine Gleichung. Dies ergibt also ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen.

In diesem Fall wird daraus:

$$\begin{aligned} K2 : \quad I_{42} + I_{32} &= I_{21} + I_{20} \\ K3 : \quad I_{43} &= I_{32} + I_{31} + I_{30} \\ K4 : \quad 0A &= I_{43} + I_{42} + I_{41} + I_{40} \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt werden alle unbekannt Ströme auf die linke Seite und alle durch Stromquellen gegebenen Ströme auf die rechte Seite geschafft. In diesem Fall wird ausserdem $I_{xy} = -I_{yx}$ benutzt um aus $I_{32} = -I_{23}$ zu machen.

$$\begin{aligned} K2 : \quad I_{42} - I_{21} - I_{20} &= I_{23} \\ K3 : \quad I_{43} - I_{31} - I_{30} &= -I_{23} \\ K4 : \quad -I_{43} - I_{42} - I_{41} - I_{40} &= 0A \end{aligned}$$

Nun werden die Ströme auf der linken Seite mit $I_{xy} = G_{xy}U_{xy}$ ersetzt. Wobei G_{xy} der Leitwert des Widerstandes zwischen Knoten x und Knoten y ist. Hier wurden die gegebenen Leitwerte gleich eingesetzt:

$$\begin{aligned} K2 : \quad -4GU_{21} - 2GU_{20} + 2GU_{42} &= I_{23} \\ K3 : \quad 2GU_{43} - 3GU_{31} - GU_{30} &= -I_{23} \\ K4 : \quad -2GU_{43} - 2GU_{42} - 5GU_{41} - GU_{40} &= 0A \end{aligned}$$

Mit $U_{xy} = U_x - U_y$ wird dies zu einem Gleichungssystem mit 3 Unbekannten (U_2 , U_3 und U_4):

$$\begin{aligned} K2 : \quad -4G(U_2 - U_1) - 2G(U_2 - U_0) + 2G(U_4 - U_2) &= I_{23} \\ K3 : \quad 2G(U_4 - U_3) - 3G(U_3 - U_1) - G(U_3 - U_0) &= -I_{23} \\ K4 : \quad -2G(U_4 - U_3) - 2G(U_4 - U_2) - 5G(U_4 - U_1) - G(U_4 - U_0) &= 0A \end{aligned}$$

Nun werden die einzelnen Potentiale/Spannungen zusammengefasst und sortiert.

$$\begin{aligned} K2 : \quad 4GU_1 - 8GU_2 + 0GU_3 + 2GU_4 &= I_{23} \\ K3 : \quad 3GU_1 + 0GU_2 - 6GU_3 + 2GU_4 &= -I_{23} \\ K4 : \quad 5GU_1 + 2GU_2 + 2GU_3 - 10GU_4 &= 0A \end{aligned}$$

Anschließend wird durch G geteilt und die Spannungsquelle U_1 , auf die rechte Seite gebracht.

$$\begin{aligned} K2 : \quad -8U_2 + 0U_3 + 2U_4 &= \frac{I_{23}}{G} - 4U_1 \\ K3 : \quad +0U_2 - 6U_3 + 2U_4 &= -\frac{I_{23}}{G} - 3U_1 \\ K4 : \quad +2U_2 + 2U_3 - 10U_4 &= -5U_1 \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung erfolgt in einer Tabelle (ähnlich einer Matrix), das erspart einiges an Schreibearbeit:

| | U_2 | U_3 | U_4 | rechte Seite | Umformung |
|-----|-------|-------|-------|-----------------------------|----------------------------|
| I | -8 | 0 | 2 | $\frac{I_{23}}{G} - 4U_1$ | |
| II | 0 | -6 | 2 | $-\frac{I_{23}}{G} - 3U_1$ | |
| III | 2 | 2 | -10 | $-5U_1$ | |
| I | -8 | 0 | 2 | $\frac{I_{23}}{G} - 4U_1$ | |
| II | 0 | -6 | 2 | $-\frac{I_{23}}{G} - 3U_1$ | II |
| III | 0 | 8 | -38 | $\frac{I_{23}}{G} - 24U_1$ | $I + 4 \cdot III$ |
| I | -8 | 0 | 2 | $\frac{I_{23}}{G} - 4U_1$ | |
| II | 0 | -6 | 2 | $-\frac{I_{23}}{G} - 3U_1$ | |
| III | 0 | 0 | -106 | $-\frac{I_{23}}{G} - 84U_1$ | $4 \cdot II + 3 \cdot III$ |

Aus Gleichung III folgt:

$$U_4 = \frac{1}{106} \cdot \frac{I_{23}}{G} + \frac{42}{53} U_1$$

Damit ergibt sich aus Gleichung II:

$$\begin{aligned} -6U_3 + 2 \left(-\frac{1}{106} \cdot \frac{I_{23}}{G} - \frac{42}{53} U_1 \right) &= -\frac{I_{23}}{G} - 3U_1 \\ -6U_3 &= -\frac{I_{23}}{G} - 3U_1 - 2 \left(-\frac{1}{106} \cdot \frac{I_{23}}{G} - \frac{42}{53} U_1 \right) \\ -6U_3 &= -\frac{108}{106} \cdot \frac{I_{23}}{G} - \frac{243}{53} U_1 \\ U_3 &= \frac{9}{53} \frac{I_{23}}{G} + \frac{81}{106} U_1 \end{aligned}$$

Und schließlich ergibt Gleichung I:

$$\begin{aligned} -8U_2 + 2 \left(-\frac{1}{106} \cdot \frac{I_{23}}{G} - \frac{42}{53} U_1 \right) &= \frac{I_{23}}{G} - 4U_1 \\ -8U_2 &= \frac{I_{23}}{G} - 4U_1 - 2 \left(-\frac{1}{106} \cdot \frac{I_{23}}{G} - \frac{42}{53} U_1 \right) \\ -8U_2 &= \frac{104}{106} \cdot \frac{I_{23}}{G} - \frac{296}{53} U_1 \\ U_2 &= -\frac{13}{106} \cdot \frac{I_{23}}{G} + \frac{37}{53} U_1 \end{aligned}$$

b)

Einsetzen der Werte: geg.: $U_1 = 12V$, $I_{23} = 100mA$, $G = 10mS$

Eingesetzt in die Gleichungen aus Teil a):

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{13}{106} \cdot \frac{100mA}{10mS} + \frac{37}{53} \cdot 12V \approx 7,151V \\ U_3 &= \frac{9}{53} \frac{100mA}{10mS} + \frac{81}{106} \cdot 12V \approx 10,87V \\ U_4 &= \frac{1}{106} \cdot \frac{100mA}{10mS} + \frac{42}{53} \cdot 12V \approx 9,604V \end{aligned}$$

c)

Berechnen der Ströme durch die Widerstände mit Leitwert 1G und 3G: Die gesuchten Ströme sind I_{30} , I_{31} und I_{40} .

$$\begin{aligned} I_{30} &= GU_3 \approx 108,7mA \\ I_{31} &= 3G(U_3 - U_1) \approx -33,96mA \\ I_{40} &= GU_4 \approx 9,604mA \end{aligned}$$

Die Ströme I_{30} und I_{40} sind positiv, d.h. der Strom fließt tatsächlich von Knoten 3 bzw. 4 nach Knoten 0. Der Strom I_{31} ist negativ, d.h. der Strom fließt eigentlich von Knoten 1 nach Knoten 3.